SESSION 2012

ÉPREUVE DE RAISONNEMENT LOGIQUE ET MATHÉMATIQUES

Lisez attentivement les instructions suivantes avant de vous mettre au travail.

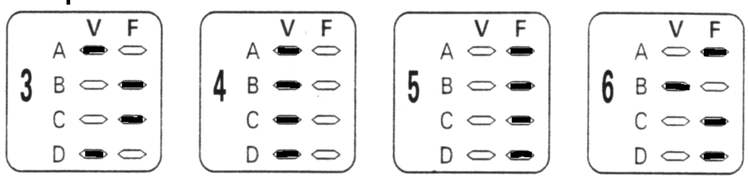
Cette épreuve est composée de trois parties de 6 questions chacune :

- Partie 1 : raisonnement logique
- Partie 2 : raisonnement mathématique
- Partie 3 : problème mathématique

Important :
L'utilisation d'une calculatrice est strictement interdite pour cette épreuve.

Chaque question comporte quatre items, notées **A. B. C. D.**. Pour chaque item, vous devez signaler s'il est vrai en l'indiquant sur la grille de réponses en marquant la case sous la lettre V ; ou faux en l'indiquant sur la grille de réponses en marquant la case sous la lettre F. Une réponse est donc une suite de quatre marques V ou F.

Exemples :



Règle d'attribution des points :
Vous disposez d'un capital de points initial. Chaque erreur entraîne une pénalité (P) qui entame votre capital. Une absence de réponse entraîne une pénalité (p) qui entame aussi votre capital (p est inférieur à P). Enfin, un bonus est attribué si vous répondez correctement aux quatre items d'une même question.

Vous vous servirez de la feuille jointe pour indiquer vos réponses en noircissant les cases situées à côté des lettres correspondantes.

Nombre de pages de l'épreuve :	8 pages
Durée de l'épreuve :	3 h 00
Coefficient de l'épreuve :	ESDES → 8 ESSCA → 8 IÉSEG → 8

Exercices n° 1 à 6 : Raisonnement logique

1) Un voyageur devant effectuer un voyage se renseigne sur les tarifs des trains et sur ceux d'un loueur de voitures. Le train coûte b € par kilomètre parcouru. Pour la voiture, il faut débourser c € plus a € par kilomètre. b est strictement supérieur à a.

A partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Si a =0,1 ; b =0,2 et c =60, la voiture devient rentable dès que le trajet dépasse 600 km.

B. Les 2 moyens de transport sont au même coût si le trajet est de $\frac{c}{a-b}$ km.

C. Si a , b et c augmentaient tous de 10%, le trajet à effectuer pour avoir un coût identique serait supérieur.

D. Si b seul augmentait de 10%, le trajet à effectuer pour avoir un coût identique deviendrait moins long de $\frac{0{,}1\,b\,c}{a^2-2{,}1\,a\,b+1{,}1\,b^2}$ km.

2) Trois enfants, Axel, Brigitte et Claude, possèdent 60 véhicules miniatures (voitures, camions et avions). Nous avons pu recueillir les informations suivantes :

- 2/3 des véhicules sont des voitures ;
- Le nombre de camions est 50% supérieur au nombre d'avions ;
- Brigitte et Claude ont 42 véhicules ;
- Axel et Claude possèdent 50% des camions ;
- Axel a 3 voitures de plus que Brigitte et 2 de plus que Claude ;
- Brigitte a un avion de moins que de camions ;
- Un des trois n'a pas d'avion ;
- Ils ont tous des camions.

A partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Brigitte a le plus de véhicules.

B. Claude a 20% des camions.

C. Claude n'a pas d'avion.

D. Axel a 3 camions.

3) Il existe différentes échelles de température. Nous utilisons par exemple les degrés Celsius. Les Américains utilisent les degrés Fahrenheit. Les degrés Réaumur étaient utilisés en France avant 1800. Ces 3 échelles sont linéaires. Voici quelques équivalents de température :

- Fusion de l'eau : 0°C ou 32°F ou 0°R ;
- Vaporisation de l'eau : 100°C ou 212°F ou 80°R

A partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Une température de 15°C est équivalente à 59°F et 10°R.

B. La température du soleil, qui est de 4420°R, est supérieure à 6000°C.

C. La température la plus basse enregistrée sur la terre, qui était de -130°F, équivaut à -50°R.

D. On peut transformer une température Fahrenheit t_F en température Celsius t_C en utilisant la formule suivante : $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32)$

4) Trois femmes (Dorothée, Béatrice et Emilie) et deux hommes (Albert et Christophe) subissent des tests de mémorisation. A l'issue de ces tests, on a évalué leurs performances individuelles. Albert a réussi 2 fois plus que Béatrice. Béatrice a réussi sept fois moins que Christophe. Christophe a réussi six fois de plus que Dorothée. Dorothée a réussi 3 fois de plus qu'Emilie. Béatrice et Dorothée ont réussi ensemble 10 fois.

A partir de ces informations, on peut conclure que :

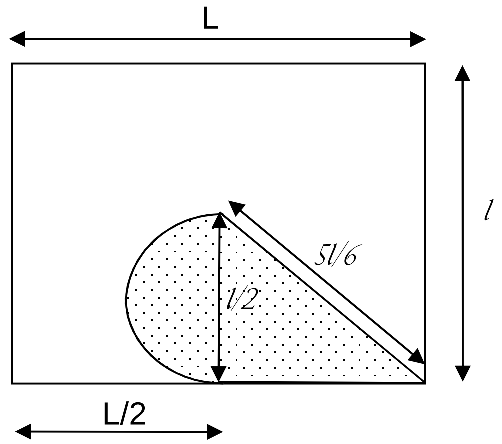
A. Béatrice a réussi 3 fois.

B. Sur les 5 participants, Christophe est celui qui a le mieux réussi.

C. Parmi les femmes, c'est Dorothée qui a la mieux réussie.

D. En moyenne, les femmes ont mieux réussi que les hommes.

5) Dans un terrain rectangulaire, se trouve un jardin botanique (dont la surface est grisée). Les dimensions des différents composants sont portées sur le graphique ci-dessous :



A partir de ces informations, on peut conclure que :

A. La largeur du terrain rectangulaire l est égale à $\frac{2}{3}\times L$

B. La surface du jardin botanique est inférieure au quart de la surface totale du terrain rectangulaire.

C. Si la largeur l du terrain rectangulaire est égale à 120 m, sa surface sera égale à 19200 m².

D. La surface du jardin botanique est égale à $\frac{1}{8}\times\left(\frac{\Pi}{4}+\frac{1}{3}\right)\times l^2$

6) Isabelle souhaite reconstituer l'arbre généalogique de sa famille. Mais, elle ne dispose que des données suivantes :

- son père avait deux oncles et une tante : Arthur, Bernard et Cécile ;
- Arthur, Bernard et Cécile ont eu six enfants : Urbain, Vincent, Walter, Xavier, Yvette et Zoé ;
- Bernard a eu la famille la plus nombreuse ;
- Yvette est enfant unique ;
- Walter et Xavier n'ont qu'un frère et pas de sœur :
- Zoé est la sœur d'Urbain et est plus âgée que lui ;
- Arthur n'a pas eu de fille ;

A partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Cécile est la mère d'Yvette.

B. Walter et Urbain sont frères.

C. Bernard a plus de fils qu'Arthur.

D. Zoé est l'aînée des enfants de Bernard.

Exercices n° 7 à 12 : Raisonnement mathématique

7) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^x+2}{1-3e^x}$. On note Δ l'ensemble de définition de f.

A. $\Delta =]-\infty; -3[$

B. f est dérivable sur l'ensemble de définition Δ

C. Pour tout $x \in \Delta$, $f'(x) = \frac{7e^x}{(1-3e^x)^2}$

D. La droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la représentation graphique de la fonction f si x tend vers $-\infty$

8) Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$.

A. Pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f(x) \geq 0$.

B. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f, au point de coordonnées $(\frac{1}{e} ; 1)$ s'écrit $y = -ex + e + 1$.

C. Pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; \frac{1}{e}[$, la courbe représentative de f est au-dessous de la droite d'équation $y = 1$.

D. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

9) On considère l'équation définie dans $\mathbb{R}$: $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3mx + m^2 = 0$ où m est un paramètre réel. On pose $u = x + \frac{m}{x}$.

A. Pour $m = 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet la racine double $x = 0$ et les 2 racines $x = 1$ et $x = 2$.

B. Pour $m \neq 0$, l'équation $f(x) = 0$ a le même ensemble de racines que : $u^2 - 3u - 2(m-1) = 0$

C. Pour $m = 1$, l'équation $f(x) = 0$ admet les 2 racines $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

D. Pour $m = 3$, f s'écrit : $f(x) = (x^2 + x + 3)(x-1)(x-3)$

10) Soit a,b,c trois réels avec a non nul et f la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$, dont la courbe représentative est une parabole **P**. On suppose que **P** passe par le point A de coordonnées (1 ; -1) et admet en ce point une tangente de pente -1.

A. On a $f'(-1)=-1$, où $f'(-1)$ désigne le nombre dérivé en -1

B. L'expression x^2-3x+1 est une solution de $f(x)$

C. De l'énoncé, on a toujours $\begin{cases} a-b+c=-1 \\ 2a+b=-1 \end{cases}$

D. Il existe une unique fonction f vérifiant les conditions de l'énoncé

11) Soit f la fonction définie sur $]5;+\infty[$, par $f(x)=-3x+1-\frac{8}{x-5}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

A. $f(x)=\frac{3x^2-16x+13}{5-x}$

B. $f'(x)=-3-\frac{8}{(x-5)^2}$

C. La droite d'équation $y=-3x+1$ est asymptote à la courbe (C)

D. Une primitive de f est : $F(x)=-\frac{3}{2}x^2+x-8\ln(x-5)$

12) L'éclairage avant d'une voiture nécessite l'emploi de deux lampes différentes. On note A l'événement « la première lampe est défaillante » et B l'événement « la deuxième lampe est défaillante ». Des essais ont montré que $\boldsymbol{P(A)=0,12}$; $\boldsymbol{P(B)=0,18}$ et $\boldsymbol{P(A\cap B)=0,07}$

A. Les événements A et B sont indépendants

B. La probabilité de l'événement « au moins une des deux lampes est défaillante » est 0,23

C. La probabilité de l'événement « les deux lampes fonctionnent » est 0,77

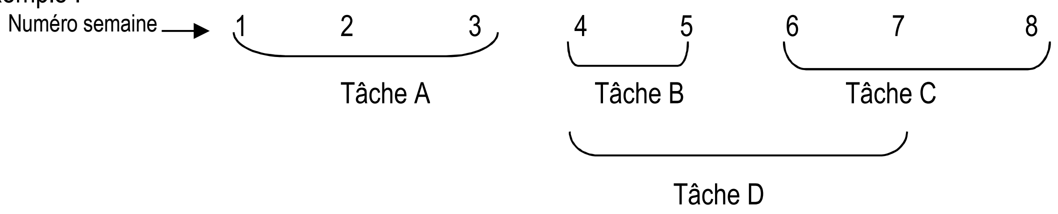
D. La probabilité de l'événement « la première lampe fonctionne et la deuxième est défaillante » est 0,11

Exercices n° 13 à 18 : Problème mathématique

Certaines questions peuvent être traitées indépendamment. D'autres nécessitent les résultats obtenus dans les questions précédentes.

Un architecte chargé d'établir les plans et d'assurer le suivi de la construction d'un nouvel immeuble, fait appel à vos services en qualité de conseiller technique. Il vous demande de répondre à une série de questions en faisant appel à vos connaissances dans le domaine des mathématiques et surtout à votre logique.
Les opérations à mener pour construire l'immeuble sont les suivantes :
En premier lieu il convient de faire les fondations. La durée de cette tâche est estimée à 3 semaines. Le gros œuvre (réalisation des murs extérieurs et des planchers) nécessitera 10 semaines et ne pourra démarrer qu'une fois les fondations terminées. La réalisation de la toiture, qui ne peut commencer avant la fin du gros œuvre, durera 3 semaines. Le temps prévu pour la mise en place des portes et des fenêtres, qui peut débuter dès que le gros œuvre est terminé, est de 4 semaines. Il faut attendre que les portes et fenêtres soient posées pour entamer les travaux de peinture extérieure qui dureront 4 semaines. Dès que la toiture est terminée, l'installation du chauffage, qui nécessite 2 semaines, peut débuter. Les électriciens demandent 4 semaines pour réaliser leur tâche (installer le circuit électrique) qui peut commencer dès que la toiture est mise en place et que les portes et fenêtres sont posées. Les travaux de finition intérieure (peinture intérieure, aménagements divers de l'immeuble) requièrent 5 semaines, et peuvent être engagés quand les électriciens et les installateurs du système de chauffage ont terminé leur travail.
Pour pouvoir superviser l'ensemble des travaux, on représente un calendrier où n'apparaît que la numérotation des semaines, le début et la fin de chacune des tâches évoquées ci-dessus, sachant que l'architecte souhaite que l'immeuble soit réalisé dans les plus courts délais.
Une tâche débute toujours en début de semaine et se termine toujours en fin de semaine.

Exemple :



Lecture du « calendrier » de l'exemple : la tâche A dure 3 semaines. La tâche B dure 2 semaines et ne peut commencer avant la tâche A. La tâche C dure 3 semaines et ne peut commencer avant la tâche B. La tâche D dure 4 semaines et ne peut commencer avant la tâche A.

<u>Remarque :</u> Chaque changement doit être pris en compte indépendamment des autres. Ainsi, par exemple, lorsqu'il s'agit de recalculer la durée totale des travaux sachant que la toiture est posée en 2 semaines plutôt que 3, on suppose que les autres tâches sont réalisées dans le temps prévu initialement.

13) A partir des informations précédentes, on peut conclure que :

A. Le retard maximum que les installateurs du chauffage peuvent enregistrer sans retarder l'ensemble des travaux, ne doit pas excéder une semaine.

B. Le retard maximum que les couvreurs (qui installent la toiture) peuvent enregistrer sans que la durée totale des travaux soit modifiée ne doit pas excéder une semaine.

C. Le retard maximum que l'on peut accorder à la tâche « peinture extérieure » sans que la durée totale des travaux soit modifiée ne doit pas excéder 5 semaines.

D. Si aucun retard n'est pris dans aucune tâche, l'ensemble des travaux demandera exactement 26 semaines.

14) On note :

- T une tâche quelconque, parmi les tâches de l'énoncé.
- $R_1(T)$ le retard maximum, exprimé en nombre entier de semaines, que peut prendre la réalisation de la tâche T sans qu'elle retarde la durée totale du projet.
- $R_2(T)$ le retard maximum, exprimé en nombre entier de semaines, que peut prendre la réalisation de la tâche T sans qu'elle retarde le début de la tâche qui suit immédiatement (et donc sans retarder la durée totale du projet).

On dit qu'une tâche T est « critique » si $R_1(T) = R_2(T) = 0$.

A partir des informations précédentes, on peut conclure que :

A. Pour toute tâche T : $R_1(T) \leq R_2(T)$

B. Précisément pour la tâche T : « réalisation de la toiture », on a : $R_1(T) = 1$ et $R_2(T) = 0$

C. Précisément pour la tâche T : « peinture extérieure » : $R_1(T) = 5$

D. Les seules tâches non critiques sont : « réalisation de la toiture », « peinture extérieure » et « installation du système de chauffage »

15) Dans les mêmes conditions que précédemment, on suppose que les durées des tâches sont variables et sont toujours exprimées en nombre entier de semaines.
Précisément, on dénote les durées suivantes : Fondations : a semaines ; Gros œuvre : b semaines ; Toiture : c semaines ; Portes et fenêtres : d semaines ; Peinture extérieure : e semaines ; Circuit électrique : f semaines ; Installation du chauffage : g semaines ; Travaux de finition intérieure : h semaines.

On suppose que : $d \geq c$, $f \geq g$ et $f \geq e$.

A partir des informations précédentes, on peut conclure que :

A. Si aucune tâche n'enregistre de retard, alors l'ensemble des travaux demandera au minimum $a + b + d + f + h$ semaines

B. Si les travaux de finition intérieure durent x semaines de plus que prévu, alors l'ensemble des travaux demandera au minimum $a + b + d + f + h + x$ semaines

C. Si les travaux de fondations durent 1 semaine de plus que prévu, alors l'ensemble des travaux demandera au minimum $a + b + d + f + h + 1$ semaines

D. Si les travaux de peinture extérieure requièrent y semaines de plus que prévu, alors l'ensemble des travaux demandera au minimum $a + b + d + f + h + y$ semaines.

16) Après avoir réalisé le gros œuvre, l'architecte vous demande de l'aider à évaluer la rentabilité de la mise en place d'un isolant intérieur dans chacune des pièces de l'immeuble. Vous disposez des informations suivantes qui correspondent à une pièce parfaitement représentative de l'ensemble de celles que l'on peut trouver dans l'immeuble :

- Taille de la pièce non isolée : longueur 10,22 mètres, largeur 5,22 mètres et hauteur 3 mètres.
- Coût du chauffage annuel : 4 € par m^3

Les caractéristiques de l'isolant posé uniquement sur les 4 murs sont les suivantes :

- Epaisseur de l'isolant : 11 cm
- Coût de l'isolation pose comprise : 2000 €
- L'isolant posé réduit le volume de la pièce à chauffer.
- Gain de chauffage lié à la présence de l'isolant par rapport à une pièce non isolée : 25% du coût annuel par m^3 à chauffer.

Pour simplifier les calculs, on ne tient pas compte de la présence de portes et fenêtres. De plus, le calcul des volumes des pièces sera arrondi au m^3.

A partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Le volume de la pièce sans isolant est inférieur à 160 m^3.

B. Sur une année, le chauffage d'une pièce non isolée coûte plus de 600 €.

C. En isolant la pièce, le volume de celle-ci se réduit de plus de 10%.

D. Sur une année, le chauffage de la pièce isolée coûte 600 €.

17) L'investissement est jugé rentable dès que la réduction des factures de chauffage, cumulée depuis la pose de l'isolant, est au moins égale au coût de l'isolation.

A partir des informations précédentes, on peut conclure que :

A. Sur une période de 5 ans, l'économie de chauffage, réalisée par l'isolation, est supérieure à 1000 €.

B. La pose de l'isolant devient rentable durant la 13ème année.

C. Si l'isolant permettait de réduire la facture de chauffage à 440 € par an, l'investissement deviendrait rentable durant la 8ème année.

D. Le gain de chauffage, lié à la présence de l'isolant, doit être de 35% du coût annuel par m^3 à chauffer pour que l'investissement devienne rentable exactement 8 ans après la pose de l'isolant.

18) Les propriétaires qui ont payé 1000 € /m² un local de l'immeuble (la surface facturée est celle calculée sans isolation arrondie au m²) acceptent la mise en place de l'isolant et la financent également (2000 €). Un de leurs conseillers les invite à s'interroger sur toutes les conséquences économiques de la mise en place de l'isolant. En particulier, il insiste sur le fait que l'isolation réduit la surface utile de la pièce. En cas de revente, la surface facturée, surface arrondie au m², sera donc réduite.

A partir des informations précédentes, on peut conclure que :

A. L'investissement initial (achat + isolation) est inférieur à 55000 €.

B. Au bout de 20 ans, si le local est revendu à 1300 € /m², les propriétaires gagneront plus de 1000 € compte tenu de l'investissement initial et des coûts de chauffage.

C. Au bout de 20 ans, le local doit être revendu à au moins 1280 € /m² pour que les propriétaires récupèrent leur investissement initial et les coûts de chauffage.

D. Une pièce non isolée revendue au bout de 20 ans à 1300 € /m², fait gagner au propriétaire plus d'argent qu'une pièce isolée revendue au même prix au m².