



**2009**

> **FICHES BONUS AURLOM**

## **SYSTEMES D'ÉQUATIONS**



## Définition :

### Solution d'un système d'équations

---

Une solution du système est un ensemble de solutions satisfaisant chaque partie du système

Cet ensemble de solutions peut être soit **fini**, soit **infini** soit **vide** selon que les équations sont compatibles ou incompatibles.

### Exemple :

$\begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$  est composé de deux équations incompatibles.

Son ensemble de solution est  $S = \emptyset$ .

$\begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x > -1 \end{cases}$  a le même ensemble de solution que l'équation  $x^2 - x = 0$  soit  $S = \{0, 1\}$ .

### Degrés de liberté d'un système d'équations

---

Un système est toujours caractérisé par un nombre d'équations et un nombre d'inconnues. Les inconnues sont les degrés de liberté du système.

Deux équations sont indépendantes si elles donnent deux informations différentes, c'est à dire qu'il est impossible de déduire l'une de l'autre.

Exemple :  $x^2 = 4$  et  $x > 0$  donnent deux informations différentes alors que  $x^2 = 4$  et  $2x^2 = 8$  donnent rigoureusement la même information.

### Méthodes de résolution d'un système d'équation linéaires

---

#### **La méthode de substitution**

Dans cette méthode on commence par isoler et expliciter une inconnue dans l'une des équations du système (c'est-à-dire l'exprimer en fonction des autres inconnues), puis de substituer l'inconnue explicitée dans les autres équations.

### Exemple :

$$\begin{cases} 4x - y = 3 & (1) \\ 3x + 5y = 8 & (2) \end{cases}$$



Ici,  $y$  est déjà **explicité**  $y \mid 4x - 43$ , il suffit maintenant de le remplacer par sa valeur exprimée grâce à des  $x$  dans l'équation (2), on **substitue** dans (2). On obtient :

$$\begin{cases} 4x - 4y \mid 3 \\ 3x - 25 \Delta (4x - 43) \mid 8 \end{cases}$$

Soit après calcul :

$$\begin{cases} 4x - 4y \mid 3 \\ 23x \mid 23 \end{cases}$$

Nous avons maintenant une équation du premier degré à une seule inconnue, résolue, elle donne  $x \mid 1$ .

Pour trouver  $y$ , il suffit de revenir à sa forme explicitée et d'effectuer le calcul, maintenant que nous connaissons  $x$ .

$$4 \Delta 14 y \mid 3 \text{ ou encore } y \mid 1$$

On a résolu le système. On note:  $S \mid \{1; 1\} \text{ €}$ .

Remarque : Cette méthode ne doit pas être utilisée au cas où l'explicitation d'une des inconnues provoque des équations du type :  $y \mid \frac{1}{42}(53 - 41x)$ , car c'est une source abondante d'erreurs de calcul.

### **La méthode de combinaison linéaire**

Cette méthode consiste à multiplier une des équations pour qu'un des termes ait le même coefficient dans chaque équation puis d'additionner ou soustraire entre elles les deux équations pour faire disparaître le terme en question.

Exemple d'application :

$$\begin{cases} 4x - 4y \mid 3 & (1) \\ 3x - 25y \mid 8 & (2) \end{cases}$$

On multiplie la première équation par 5 pour que le terme  $y$  ait le même coefficient dans les deux équations. Cela donne:



$$\begin{cases} 20x + 45y = 15 \\ 3x + 25y = 8 \end{cases}$$

En additionnant les deux équations entre elles, le terme  $y$  disparaît et on obtient:  
 $(20x + 45y) + (3x + 25y) = 15 + 8$ , c'est à dire :  $23x = 23$

D'où  $x = 1$ , que l'on peut substituer dans une des équations d'origine pour déterminer l'autre terme  $y$ .

Remarque : Cette méthode est plus élégante et plus facile à utiliser pour des systèmes de plus grande envergure que la méthode de substitution.

### La méthode graphique

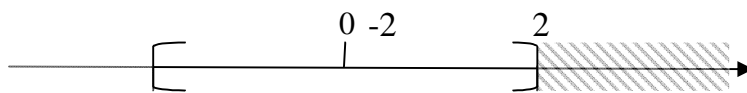
La méthode graphique peut s'utiliser lorsque les inconnues du système sont au nombre de 1 ou 2.

#### En dimension 1

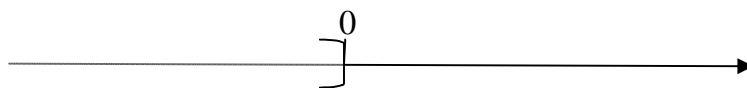
On construit une droite qui représente l'espace des réels puis on reporte l'information que donne chaque équation en hachurant la partie exclue.

Exemple :  $\begin{cases} x^2 \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$

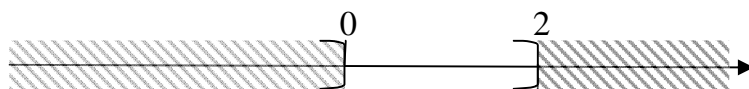
La première équation nous donne la condition suivante :  $x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$



La deuxième équation seule donne la condition suivante :  $x \geq 0$



Les deux équations prises simultanément donnent :



Ce qui représente l'ensemble solution  $S = [0; 2]$



### En dimension 2

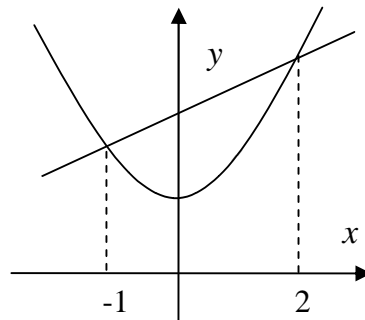
Lorsque le système possède deux degrés de liberté ( $x$  et  $y$ ), il faut se placer dans le plan pour résoudre le problème de manière graphique.

A chaque équation à deux inconnues correspond une courbe (équation avec égalité) ou une zone de l'espace (inégalités). L'ensemble des solutions correspond aux points d'intersection des différentes courbes.

### Exemple :

$$\begin{cases} y = 4x + 4 \\ x^2 = y - 4 \end{cases}$$

La première équation donne la droite d'équation  $y = 4x + 4$ , on étudie ses points d'intersection avec la courbe d'équation  $y = x^2 + 4$ .



La résolution graphique donne ainsi deux points d'intersection, pour  $x = -1$ ,  $y = 0$  et  $x = 2$ ,  $y = 12$ .